Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ». ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2012

Наведені основні методи розв’язування задач із інтегрального числення функцій однієї змінної.

Для студентів ДНУ, які вивчають курси “Вища математика” і “Математичний аналіз”.

Темплан 2012, поз. 24

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ». ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. О. Руденко
канд. фіз.-мат. наук, доц. М. С. Чурілова

Редактор В. О. Насєкан
Техредактор Л. П. Замятіна
Коректор Т.А. Белиба

Підписано до друку 20.05.12. Формат 60×84/16.Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 1,4. Ум. фарбовідб. 1,4.
Обл.-вид. арк. 1,2. . Тираж 100 пр. Зам. № 427

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

Передмова

Методи інтегрального числення функцій однієї змінної широко застосовуються у рішенні прикладних задач природничих і технічних наук.

Перша частина видання являє собою опорний конспект, який складається з основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню практичних навиків розв'язування задач. Згідно з цим матеріал систематизовано й поділено на частини таким чином, що можна легко знайти необхідну формулу або визначення. Варто підкреслити, що таке викладення сприяє засвоєнню лекційного матеріалу, але не замінює його.

У другій частині видання вміщені варіанти завдань для індивідуального виконання.

1. Невизначений інтеграл

1.1. Означення, властивості, основні інтеграли та методи інтегрування

Первісна

Первісною функції f на проміжку I називається функція F, така, що $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де F– первісна функції f, C– довільна стала.

Властивості

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
4. $\int df(x) = f(x) + C$.
5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
6. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, $u = u(x)$– диференційована функція, то $\int f(u)dx = F(u) + C$.

Основні інтеграли

$\int 0 \cdot dx = C$, $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$,

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$,

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$,

$\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$,

$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$,

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

$$\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C, \qquad \int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C,$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}dx = -\mathrm{cth}x + C, \qquad \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}dx = \mathrm{th}x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C.$$

Деякі рекурентні формули

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx.$$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx.$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx.$$

Деякі інтеграли, що не є елементарними функціями

$$\int e^{x^2}dx, \qquad \int e^{-x^2}dx, \qquad \int \sin x^2 dx, \qquad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbf{N}, \qquad \int \frac{\cos x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbf{N} \qquad \int \frac{e^x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$\int \frac{x}{\sin x}dx, \quad \int \frac{x}{\cos x}dx, \quad \int \frac{\mathrm{tg}x}{x}dx, \quad \int \frac{\mathrm{ctg}x}{x}dx, \quad \int x\,\mathrm{tg}x dx, \quad \int x\,\mathrm{ctg}x dx,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x}dx, \qquad \int \frac{\arccos x}{x}dx, \qquad \int \frac{\mathrm{arctg}x}{x}dx, \qquad \int \frac{\mathrm{arcctg}x}{x}dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{xdx}{\ln x}, \qquad \int \frac{x^2 dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{dx}{x^2 \ln x},$$

$$\int e^x \ln x dx, \qquad \int \ln\sin x dx, \qquad \int \ln\cos x dx, \qquad \int \ln\mathrm{tg}x dx.$$

Заміна змінної у невизначеному інтегралі

1. $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(u(x)) + C.$

2. Якщо $x = \varphi(t), \quad \varphi'(t) \neq 0$, F– первісна для $(g \circ \varphi)\varphi'$, то

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В інтегралах $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin bxdx$, $\int x^n \cos bxdx$ за u позначають x^n, а за dv – решту виразу. В інтегралах $\int x^n \ln^m dx$, $\int x^n \arcsin xdx$, $\int x^n \arccos xdx$, $\int x^n \mathrm{arctg} xdx$ за dv позначають $x^n dx$, а за u – решту виразу. В інтегралах $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$ формулу інтегрування частинами застосовують двічі.

1.2. Інтегрування раціональних функцій

Інтегрування елементарних раціональних функцій

1. $\int \frac{A}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1$.

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx, \quad p^2 - 4q < 0$, заміною $x + \frac{p}{2} = t$ зводиться до лінійної комбінації інтегралів $\int \frac{tdt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C$ та $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C$.

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx, \quad p^2 - 4q < 0, \quad k > 1$, заміною $x + \frac{p}{2} = t$ зводиться до лінійної комбінації інтегралів $\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C$ та $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Останній обчислюється за рекурентною формулою.

Розклад правильної дробово-раціональної функції на елементарні дроби

Якщо P(x), Q(x) – многочлени, степінь P(x) менше ніж Q(x) і $Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \times (x-\alpha_2)^{k_2} \ldots \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1} \left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2} \ldots$, де $p_i^2 - 4q_i < 0$, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots \frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots$$

Після множення на Q(x) невідомі коефіцієнти знаходять із умові тотожної рівності двох многочленів.

Інтегрування раціональної функції у загальному випадку

Будь-яку раціональну функцію можна подати у вигляді $S(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, де S, P, Q – многочлени і степінь P менше ніж Q. Після розкладу $P(x)/Q(x)$ інтегрування раціональної функції зводиться до інтегрування елементарних дробів.

1.3. Метод раціоналізації

Нехай R(u,v,…,s) – раціональна функція від u,v,…,s.

Інтегрування ірраціональностей від дробово-лінійної функції

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $(ad \neq bc)$ раціоналізує підстановка $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$.

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, $(ad \neq bc)$ раціоналізує підстановка $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, де n – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, ...n_k$.

$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$ раціоналізує підстановка $t^n = x$, де n – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, ...n_k$.

Інтегрування біноміальних диференціалів

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \ m, n, p \in \mathbf{Q}, \ ab \neq 0$$

раціоналізується лише у трьох випадках:

1. $p \in \mathbf{Z}$; підстановка $x = t^k$, де k– спільний знаменник m и n;
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$; підстановка $a + bx^n = t^k$, де k–знаменник p;
3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$; підстановка $ax^{-n} + b = t^k$, де k–знаменник p.

Інтегрування раціонально-тригонометричних функцій

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди раціоналізує універсальна підстановка $tg(x/2) = t$ $\left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right)$.

Спеціальні підстановки

1. Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то раціоналізує підстановка $\cos x = t$.
2. Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то раціоналізує підстановка $\sin x = t$.
3. Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то раціоналізує підстановка $tgx = t$.

Обчислення інтегралів виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

Підстановки Ейлера:

1. $a > 0$; раціоналізують підстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$;
2. $c \geq 0$; раціоналізують підстановки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;
3. $b^2 - 4ac > 0, \quad ax^2 + bx + c = t(x - x_1)(x - x_2)$; раціоналізують підстановки $ax^2 + bx + c = t(x - x_i)$, де $i = 1$ або $i = 2$.

В окремих випадках доцільні наступні тригонометричні підстановки:

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad x = a\sin t \text{ або } x = a\cos t,$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx, \quad x = \frac{a}{\cos t} \text{ або } x = \frac{a}{\sin t},$$

$$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx, \quad x = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

2. Визначений інтеграл

2.1. Означення, властивості, методи інтегрування

Визначений інтеграл

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 1).

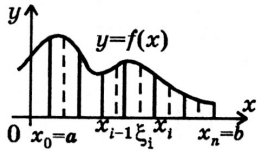

Рис. 1

Властивості

1. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$. 2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$ 3. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. 5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. 6 $\int\limits_a^b dx = b - a$.

7. $f(x) \ge 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \ge 0,\ a \le b$. 8. $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx,\ a \le b$.

9. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx,\ a \le b$. 10. $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, де $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

$M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 11. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),\ \xi \in [a,b]$ (теорема про середнє значення).

Геометричний зміст

Якщо $f(x) \ge 0$ $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ – площа криволінійної трапеції (рис. 2).

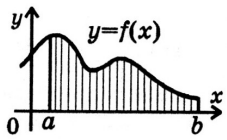

Рис. 2

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;\ \ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

Інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

2.2. Застосування визначеного інтеграла у геометрії

Обчислення площі

Площа у прямокутних координатах (рис. 3)

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

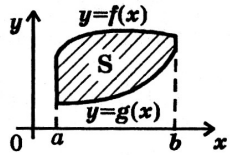

Рис. 3

Площа криволінійного сектора у полярних координатах. $\rho = \rho(\varphi)$ –рівняння кривої, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис. 4).

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

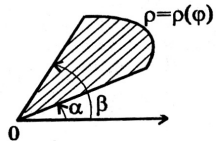

Рис. 4

Обчислення довжини плоскої кривої

Довжина кривої у прямокутних координатах. y=f(x) – рівняння кривої, $a \le x \le b$,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx .$$

Довжина кривої, заданої параметрично: x=x(t), y=y(t); $t_0 \le t \le t_1$,

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt .$$

Довжина кривої у полярних координатах. $\rho = \rho(\varphi)$ – рівняння кривої,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi .$$

Обчислення об'єму тіла

Об'єм тіла з відомою площею перерізу (рис. 5).

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

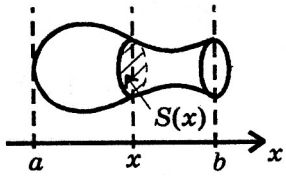

Рис. 5

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox (рис. 6).

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx .$$

Об'єм тіла обертання навколо осі Oy

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx .$$

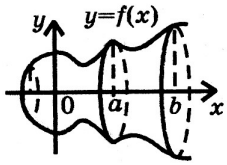

Рис. 6

Обчислення площі поверхні обертання

Одержаної обертанням кривої y=f(x) $a \le x \le b$ навколо осі Ox

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Одержаної обертанням кривої x=x(t), y=y(t); $t_0 \le t \le t_1$, навколо осі Ox

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграл за допомогою заміни змінної.

1.а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$; б) $\int (2x-3)^{10} dx$; в) $\int x e^{-x^2} dx$.

2.а) $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}$; б) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$; в) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

3.а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$; в) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

4.а) $\int \frac{3^{x+1} dx}{1+9^{x+1}}$; б) $\int e^{x^3} x^2 dx$; в) $\int \sin^5 x \cos x dx$.

5.а) $\int \frac{x \arccos^3 x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$; б) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$; в) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

6.а) $\int \sqrt[5]{2-3\cos x} \sin x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; в) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

7.а) $\int \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$; в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

8.а) $\int \frac{x^6 dx}{x^{14}+49}$; б) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

9.а) $\int x \sin 2x^2 dx$; б) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$; в) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$.

10.а) $\int \frac{dx}{4^{\operatorname{ctg} x} \sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; в) $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}} dx$.

11. а) $\int \frac{dx}{sh^2 x \sqrt[3]{thx}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$; в) $\int \frac{x^4}{(x^5+1)^4}dx$.

12. а) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$; б) $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)dx$; в) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

13. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; в) $\int x(1-x)^{10}dx$.

14. а) $\int \frac{5^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}dx$; б) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$; в) $\int tgxdx$.

15. а) $\int \frac{sh(arctg(x+1))}{x^2+2x+2}dx$; б) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами.

1. а) $\int arctgxdx$; б) $\int x^2 \cos xdx$.

2. а) $\int xe^x dx$; б) $\int x^2 \sin 2xdx$.

3. а) $\int \ln xdx$; б) $\int x^3 \sin xdx$.

4. а) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int e^x \cos 3xdx$.

5. а) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

6. а) $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int e^x \sin xdx$.

7. а) $\int xtg^2 xdx$; б) $\int \cos(\ln x)dx$.

8.а) $\int x^2 \ln(1+x)dx$; б) $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

9.а) $\int x\cos x dx$; б) $\int x\operatorname{arctg}^2 x dx$.

10.а) $\int \arcsin x dx$; б) $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$.

11.а) $\int x\operatorname{arctg}x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$.

12.а) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; б) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg}x)dx$.

13.а) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; б) $\int x^2 e^{-2x}dx$.

14.а) $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$; б) $\int x^3 e^{-x^2}dx$.

15.а) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$; б) $\int x^5 e^{x^3}dx$.

3. Обчислити інтеграл від раціональної функції.

1.а) $\int \frac{2}{(1+x)(1-x)}dx$; б) $\int \frac{x^4-4x^3+2x-1}{x^2-x+1}dx$.

2.а) $\int \frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; б) $\int \frac{3x+5}{x^4-1}dx$.

3.а) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int \frac{x+3}{x^3+1}dx$.

4.а) $\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int \frac{x^2dx}{(2+x)(1-x^3)}dx$.

5.а) $\int \frac{2x^2-11x-25}{x^3-7x-6}dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

6.а) $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; б) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

7.а) $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$; б) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

8.а) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; б) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$.

9.а) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.

10.а) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; б) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

11.а) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

12.а) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

13.а) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$; б) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

14.а) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$; б) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

15.а) $\int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

4. Обчислити інтеграл від ірраціональної функції.

1) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

2) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$.

3) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

4) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

5) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

9) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

11) $\int x^3\left(1-3x^2\right)^{5/3}dx$.

12) $\int \frac{(2x-3)^{1/2}dx}{(2x-3)^{1/3}+1}$.

13) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

14) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

15) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1-x}dx$.

5. Обчислити інтеграл, що містить квадратний тричлен.

1.а) $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-1}dx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+6}}dx$.

2.а) $\int \frac{x+2}{x^2+x-2}dx$; б) $\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

3.а) $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+2}dx$; б) $\int \frac{4x-8}{\sqrt{x^2+6x-2}}dx$.

4.а) $\int \frac{1-x}{1+x-x^2}dx$; б) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$.

5.а) $\int \frac{4+x}{x^2+6x-10}dx$; б) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{5+6x-x^2}}dx$.

6.а) $\int \frac{5-2x}{x^2-4x+5}dx$; б) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

7.а) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}dx$; б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2-6x+2}}dx$.

8.а) $\int \frac{x-7}{4-x-x^2}dx$; б) $\int \frac{3-2x}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$.

9.а) $\int \frac{4x+9}{3+2x-x^2}dx$; б) $\int \frac{7-x}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

10.а) $\int \frac{x+5}{x^2-5x+7}dx$; б) $\int \frac{3+x}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$.

11.а) $\int \frac{2-x}{2-2x-x^2}dx$; б) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2-x+2}}dx$.

12.а) $\int \frac{x-3}{x^2-3x+6}dx$; б) $\int \frac{5-x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

13.а) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+14}dx$; б) $\int \frac{x-6}{\sqrt{x^2+5x+4}}dx$.

14.а) $\int \frac{4x-5}{x^2+x-1}dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2+2x-x^2}}dx$.

15.а) $\int \frac{3-x}{3-6x-x^2}dx$; б) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5+x+x^2}}dx$.

6. Обчислити інтеграл за допомогою підстановки Чебишова.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

2) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$.

3) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

5) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

6) $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

7) $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$.

8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

9) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$.

10) $\int x^{19}\cdot\sqrt{1+x^{10}}dx$.

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

12) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

13) $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}dx$.

14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

15) $\int x^3\cdot\sqrt[4]{1+x^2}dx$.

7. Обчислити інтеграл від тригонометричної функції.

1.а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{\sin x}{\sin x+3\cos x}dx$.

2.а) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cdot\cos x}$.

3.а) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}$.

4.а) $\int \frac{dx}{2-\sin x-3\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$.

5.а) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-1}$; б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}dx$.

6.а) $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x-2}$; б) $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$.

7.а) $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x + 1}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

8.а) $\int \frac{dx}{4\sin x + \cos x - 5}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$.

9.а) $\int \frac{dx}{\sin x + 5\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \sin^2 x}$.

10.а) $\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x}$; б) $\int tg^5 x dx$.

11.а) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 2}$; б) $\int ctg^6 x dx$.

12.а) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$; б) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x}$.

13.а) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}$; б) $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}$.

14.а) $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 2}$; б) $\int \sin^3 x dx$.

15.а) $\int \frac{dx}{3\cos x + 2\sin x - 1}$; б) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x}$.

8. Обчислити інтеграл від трансцендентної функції.

1) $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}$.

2) $\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^x}$.

3) $\int \frac{1 + e^{x/2}}{\left(1 + e^{x/4}\right)^2} dx$.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

5) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}$.

6) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$.

7) $\int \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$.

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}}$.

9) $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$.

10) $\int e^{2x^2+\ln x}dx$.

11) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

12) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$.

13) $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}dx$.

14) $\int 4^x\left(1-\frac{4^{-x}}{x^5}\right)dx$.

15) $\int e^{-3x}\left(2-9x\right)dx$.

9. Обчислити визначені інтеграли.

1.а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

2.а) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$;

б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

3.а) $\int_0^1 \left(1+e^{-x}\right)dx$;

б) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

4.а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(x+\pi\right)}$;

б) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$.

5.а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+x^2}$;

б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

6.а) $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 4x}$;

б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

7.а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

8.а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(3x-\frac{\pi}{2})dx$;

б) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

9.а) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$;

б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

10.а) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx$; б) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

11.а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tgxdx$.

12.а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}$; б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

13.а) $\int_0^1 \sqrt{1-x}dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

14.а) $\int_0^1 xe^x dx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[4]{x}}$.

15.а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x}}$.

10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $ax = y^2$, $ay = x^2$.
2) $y = x^2$, $x + y = 2$.
3) $ay = 2x - x$, $x + y = 2$.
4) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.
5) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
6) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.
7) $y = \frac{4}{x}$, $x + y = 5$.
8) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
9) $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$.
10) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
11) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
12) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.
13) $y = -x^2 - 4x$, $y = 2$, $x = 0$.
14) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 2$.
15) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$

11. Обчислити об'єм тіла обертання:

1) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, навколо осі ох.

2) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, навколо осі оу.

3) $y^2 = 4x$, $x = 1$, навколо осі ох.

4) $y^2 = 4x$, $x = 1$, навколо осі оу.

5) $y = e^{-x}$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$, навколо осі ох.

6) $y = e^{-x}$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$, навколо осі оу.

7) $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$, навколо осі ох.

8) $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$, навколо осі оу.

9) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $0 \le x \le 4$, навколо осі ох.

10) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $0 \le x \le 4$, навколо осі оу.

11) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $0 \le x \le 4$, навколо осі ох.

12) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $0 \le x \le 4$, навколо осі оу.

13) $y = x^2$, $y = 0$, $0 \le x \le 2$, навколо осі ох.

14) $y = x^2$, $y = 0$, $0 \le x \le 2$, навколо осі оу.

15) $y = x^2$, $y = 4$, $0 \le x \le 2$, навколо осі ох.